1) (2 val) Para um sistema vibratório amortecido, caracterizar a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (25%) perturbação inicial de velocidade $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$;

b) (25%) excitação passiva $y(t)=Y\cos\omega t$ com $\omega>\sqrt{2}\omega_n$;

c) (25%) Solicitação periódica $f(t)=f(t+T)$. Indicar em que condições o movimento de resposta é próximo de um movimento harmónico simples;

d) (25%) solicitação transiente em "degrau" $f(t)=F_0\mu(t)$.

2) (2 val) O isolamento de vibrações é uma técnica de controlo passivo de vibrações.

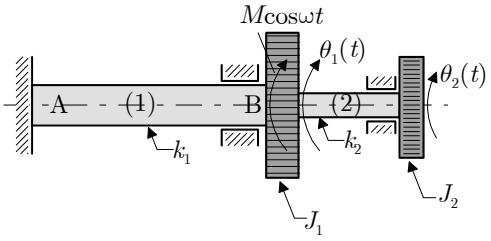
a) (25%) Explicar em que consiste o isolamento de vibrações numa transmissão activa e numa transmissão passiva;

b) (25%) Para uma transmissão activa, definir transmissibilidade e representá-la em função da frequência para 2 valores distintos da razão de amortecimento, indicando eventuais pontos (zonas) notáveis;

c) (25%) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa, da rigidez e do amortecimento do sistema;

d) (25%) Para uma excitação multi-frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento do sistema de isolamento.

3) (2 val) A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.

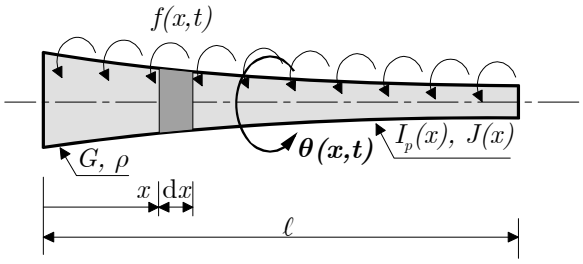


a) (25%) Explicar, sucintamente, a função do absorsor de vibrações;

b) (25%) Estabelecer as equações de movimento do sistema;

c) (25%) Representar graficamente a amplitude $\Theta_2(\omega)$ e a amplitude $\Theta_1(\omega)$ antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição (ω) de funcionamento;

d) (25%) Actuando ao nível dos momentos de inércia J_1 e J_2, indicar, justificando, uma solução para afastar as 2 frequências naturais ω_1 e ω_2.



4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção $\theta(x,t)$ provocada por um momento torsor distribuído $f(x,t)$.

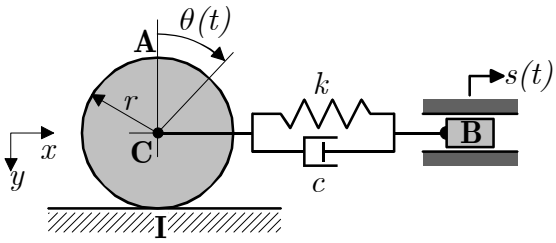
a) (25%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx, estabelecer e caracterizar a equação diferencial de movimento do veio representado.

b) (25%) Escrever as expressões de ortonormalidade das formas naturais $\Theta_r(x),\ r=1,\ldots$;

c) (25%) Mostrar, justificando, como determinar a resposta $\theta(x,t)$ à solicitação genérica $f(x,t)$.

d) (25%) Definir velocidades críticas de veios. Indicar, como exemplo, um diagrama de velocidades críticas (diagrama de Campbell).

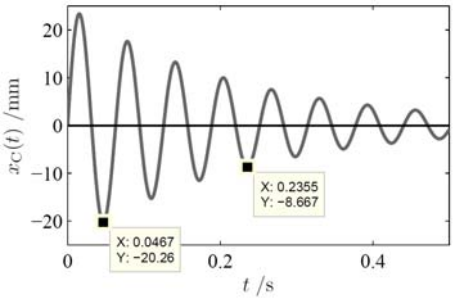
FEUP, 22 de Julho de 2010
José Dias Rodrigues



1) (4 val.) 1) O disco, de raio $r = 0.1\ \mathrm{m}$ e massa m ($J_C = \frac{1}{2}mr^2$) representado na figura, rola sem escorregar sobre uma superfície plana. O disco encontra-se ligado a um conjunto mola-amortecedor de constantes k e c, respectivamente, e submetido a uma excitação passiva $s(t)$. Para $\theta(t) = 0$ e $s(t) = 0$, a mola não está deformada.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento do sistema;

b) (15%) Num ensaio em regime livre, $s(t) = 0$, o deslocamento linear do ponto **C** está representado na figura. Determinar a razão de amortecimento e a frequência natural não amortecida;



Para resolver as alíneas seguintes, considerar a equação do movimento:

$$0.6\,\ddot{\theta}(t) + 5.4\,\dot{\theta}(t) + 6000\,\theta(t) = 5.4\,\dot{s}(t) + 6000\,s(t)$$

sendo a excitação passiva harmónica $s(t) = S\cos(\omega t)$, com amplitude igual a $5\ \mathrm{mm}$ e frequência igual a $90\ \mathrm{rad/s}$.

Determinar:

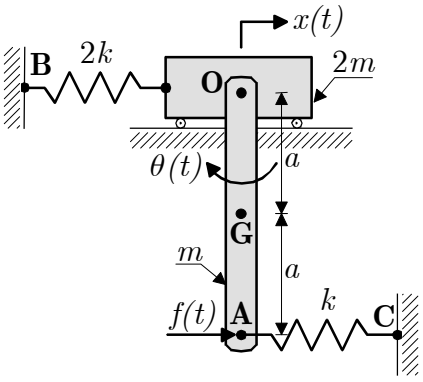
c) (15%) a amplitude do deslocamento $X_C(\omega)$ do ponto **C** do disco;

d) (20%) a amplitude F_T da força transmitida ao disco no ponto **C;**

e) (10%) A frequência de ressonância e a correspondente amplitude do ponto **C;**

f) (15%) para c=0, estabelecer a gama de frequências de excitação para as quais a amplitude $X_C(\omega)$ do deslocamento do ponto **C** não ultrapassa o valor calculado na alínea c).

v.s.f.f.



2)(4 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $x(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco de massa $2m$ e uma barra de massa m e comprimento $2a$ ($J_G = \frac{1}{12} m(2a)^2$). O bloco encontra-se ligado ao exterior através de uma mola de rigidez $2k$. A barra roda relativamente ao bloco em torno do ponto **O** e está ligada ao exterior no ponto **A** através de uma mola de rigidez k.

Para $\theta(t) = 0$ rad e $x(t) = 0$ m, as molas não estão deformadas.

a) (35%) Escrever as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$\begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 15000 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 2f(t) \end{Bmatrix}$$

b) (25%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal, com os vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

d) (25%) Determinar uma estimativa para o valor máximo da resposta $x(t)$ à excitação transiente do tipo meia onda seno:

$$f(t) = \begin{cases} 10 \sin\left(\frac{\pi}{0.4} t\right) & 0 < t \le 0.4\,\text{s} \\ 0 & t > 0.4\,\text{s} \end{cases}$$

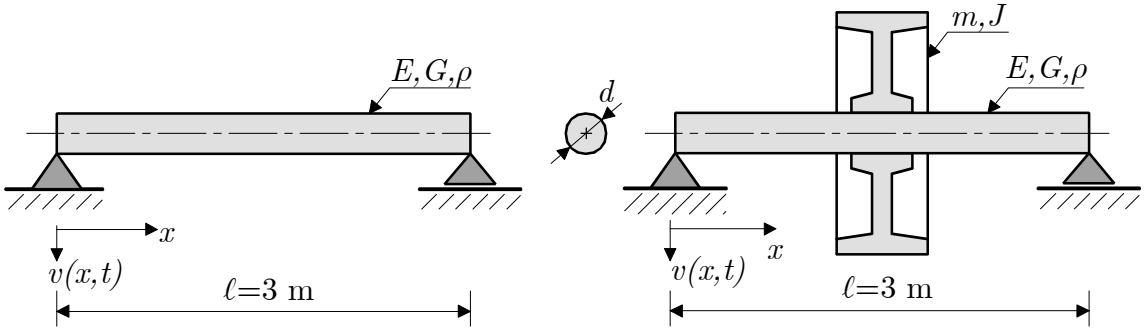
3) (4 val.) A figura a) representa um veio de comprimento $\ell = 3$ m e simplesmente apoiado para a flexão e livre-livre para a torção. O material do veio (aço) apresenta um módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa e transversal $G = 80$ GPa, e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

a) (30%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja igual a 25 Hz.

Se, a meio vão do veio for montado um volante de massa $m = 680$ kg e momento polar de inércia $J = 263$ kgm^2, conforme se representa na figura b),

b) (40%) determinar uma estimativa da nova frequência natural fundamental de flexão do sistema veio-volante;

c) (30%) determinar a frequência natural de torção do sistema veio-volante.



José Dias Rodrigues

Pedro Leal Ribeiro